29/3/2016

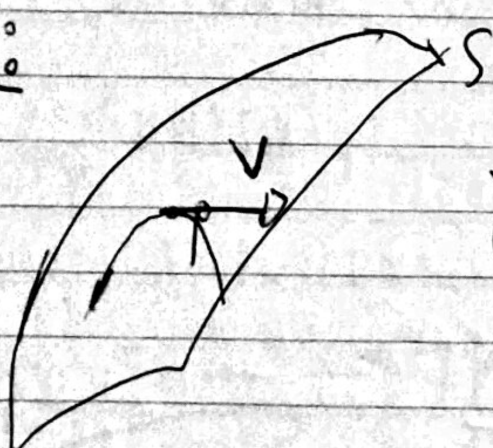
Γεωδαισιακές

<u>Ορισμός:</u> Η καμπύλη $\gamma: I \to S$ καλείται γεωδαισιακή αν-ν $\frac{D\gamma'}{dt} = 0$

$$\frac{Dw}{dt} = \left(\frac{dw}{dt}\right)^T = \frac{dw}{dt} - \langle \frac{dw}{dt}, N\circ\gamma \rangle N\circ\gamma$$

Αν γ γεωδαισιακή $\Rightarrow \|\gamma'\| =$ σταθερή

<u>Πρόταση:</u>



$\forall p \in S$ και $v \in T_pS$ υπάρχει μοναδική γεωδαισιακή $\gamma: (-\varepsilon, \varepsilon) \to S$ ώστε $\gamma(0) = p$ και $\gamma'(0) = v$

Ομογένεια γεωδαισιακών

Συμβολισμός: $\gamma(t) = \gamma(t, p, v)$

$$\gamma(0, p, v) = p \quad , \quad \left.\frac{\partial \gamma}{\partial t}\right|_{(0,p,v)} = v.$$

Λήμμα (ομογένειας): Αν η γεωδαισιακή $\gamma(t) = \gamma(t, p, v)$ ορίζεται στο $(-\varepsilon, \varepsilon)$, $\varepsilon > 0$ τότε για κάθε $\lambda > 0$ η γεωδαισιακή $\gamma(t, p, \lambda v)$ ορίζεται στο $\left(-\frac{\varepsilon}{\lambda}, \frac{\varepsilon}{\lambda}\right)$

και ισχύει $\gamma(t, p, \lambda v) = \gamma(\lambda t, p, v)$

Απόδειξη: Έστω $\beta(t) = \gamma(\lambda t, p, v) = \gamma(\lambda t)$

$$\frac{D\beta'}{dt} = ; \qquad \beta' = \lambda \gamma'(\lambda t) \, , \, \beta'' = \lambda^2 \gamma''(\lambda t)$$

$$\frac{D\beta'}{dt} = \left(\frac{d\beta'}{dt}\right)^T = (\beta'')^T = (\lambda^2 \gamma''(\lambda t))^T$$

$$= \lambda^2 (\gamma''(\lambda t))^T = 0 \quad \text{Αφου } \gamma'' /\!/ N \circ \gamma$$

$$\Rightarrow D(\gamma''(\lambda t))^T = 0$$

Άρα $\frac{D\beta'}{dt} = 0$. Άρα β γεωδαισιακή

Όμως $\beta(t) = \gamma(\lambda t)$ γεωδαισιακή

$\Rightarrow -\varepsilon < \lambda t < \varepsilon \Rightarrow -\frac{\varepsilon}{\lambda} < t < \frac{\varepsilon}{\lambda}$

Άρα η γεωδαισιακή ορίζεται στο $\left(-\frac{\varepsilon}{\lambda}, \frac{\varepsilon}{\lambda}\right)$

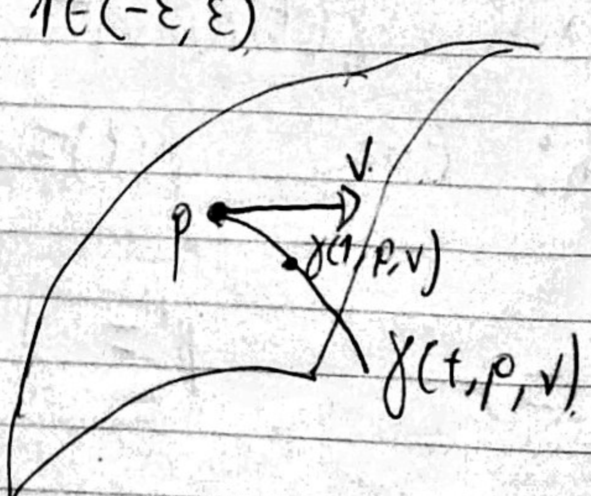
$\beta(0) = \gamma(0 \cdot \lambda, p, v) = \gamma(0, p, v) = p \Rightarrow \beta(0) = p$

$\beta'(0) = \lambda \cdot \gamma'(0\lambda) = \lambda \gamma'(0) = \lambda v \Rightarrow \beta'(0) = \lambda v$

$\overset{\text{μοναδ.}}{\Rightarrow} \gamma(t, p, \lambda v) = \beta(t) \quad \forall t.$

Εφαρμογή: Έστω ότι $1 \in (-\varepsilon, \varepsilon)$

$\gamma(1, p, v)$



Έστω $q = \gamma(1, p, v)$

$\gamma(1, p, v) = \gamma\left(1, p, \|v\| \cdot \frac{v}{\|v\|}\right)$

ομογένεια $\gamma\left(\|v\|, p, \frac{v}{\|v\|}\right)$, $\gamma\left(t, p, \frac{v}{\|v\|}\right)$

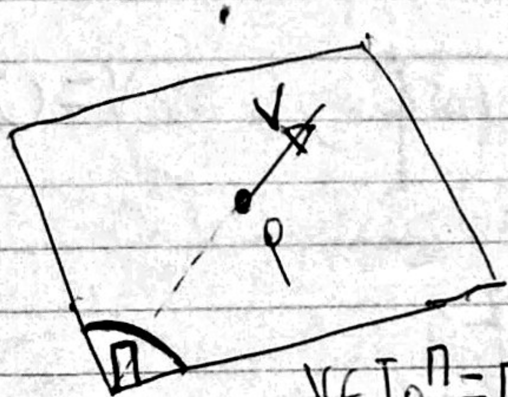
Εκθετική απεικόνιση

Ορισμός: Έστω p σημείο κανονικής επιφάνειας S

Η εκθετική απεικόνιση της S στο p (συμβολίζεται με $\exp_p$) είναι η απεικόνιση που στο $v \in T_pS$ αντιστοιχεί το σημείο $q = \exp_p(v) = \gamma(1, p, v) = \gamma\left(\|v\|, p, \frac{v}{\|v\|}\right)$

Παραδείγματα

(1) Έστω Π επίπεδο



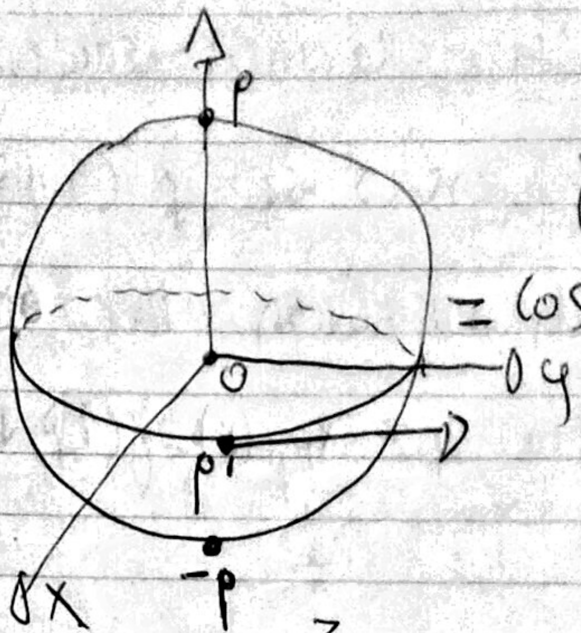
$v \in T_p\Pi = \Pi$

$$\gamma(t, p, v) = p + tv \quad \begin{cases} \gamma(0, p, v) = p \\ \gamma'(0) = v \end{cases}$$

$$\exp_p(v) = \gamma(1, p, v) = p + v = q$$

$$\exp_p : T_p\Pi \longrightarrow \Pi \quad \Big| \quad \exp_p(v_1) = \exp_p(v_2) \Rightarrow p + v_1 = p + v_2 \Rightarrow v_1 = v_2$$

(2) Έστω η $S^2 = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2=1\}$



$\gamma(t,p,v) = \cos(t\|v\|)p + \sin(t\|v\|)\frac{v}{\|v\|}$

$$\exp_p(v) = \gamma(1,p,v) = \begin{cases} \cos(\|v\|)p+\sin(\|v\|)\cdot\frac{v}{\|v\|} = q, & v\neq 0 \\ p, & v=0\end{cases}$$

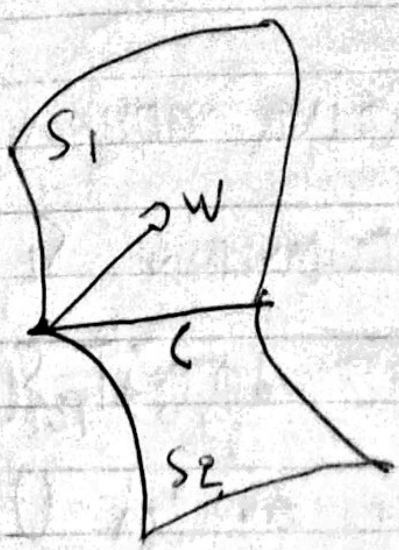
Τότε $\exp_p : T_pS^2 \to T_pS^2$,

Έστω $\|v\| = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \cos(\frac{\pi}{2})p + \sin(\frac{\pi}{2})\cdot\frac{v}{\|v\|} = \frac{v}{\|v\|}$

Έστω $\|v\| = \pi \Rightarrow \exp_{p}(\pi) = \cos(\pi)p + \sin(\pi)\cdot\frac{v}{\|v\|} = -p$

Έστω S_1, S_2 κανονικές επιφάνειες οι οποίες εφάπτονται κατά μήκος καμπύλης $c: I \to S_1 \cap S_2$ δηλαδή $T_{c(t)}S_1 = T_{c(t)}S_2$

$$\iff N_1(c(t)) = N_2(c(t))$$

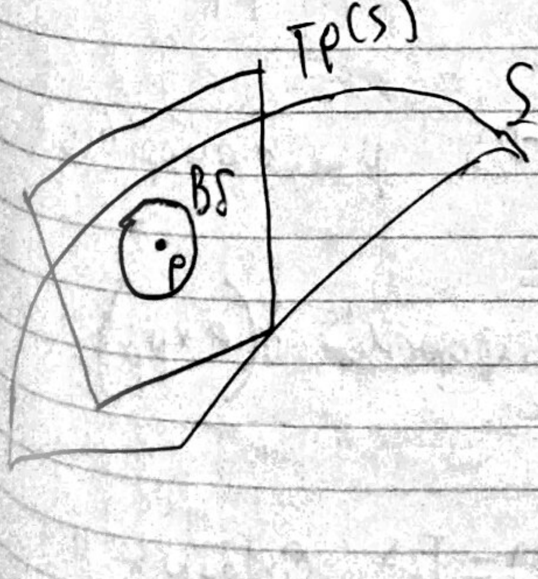


Αν w εφαπτομενικό διανυσματικό πεδίο κατά μήκος της c τότε $\frac{D^1 w}{dt} = \frac{D^2 w}{dt}$

<u>Πρόταση</u>: $\forall p \in S$ $\exists$ αριθμός $\delta = \delta(p) > 0$ έτσι ώστε η exp_p να ορίζεται στον ανοικτό δίσκο

$$B_\delta(0) = \{v \in T_pS \,/\, \|v\| < \delta\}$$ της S

και η απεικόνιση $exp_p : B_\delta(0) \to S$ είναι διαφορίσιμη



Θεώρημα Αντίστροφης Απεικόνισης

Έστω $\phi : S_1 \to S_2$ διαφορίσιμη απεικόνιση μεταξύ των κανονικών επιφανειών S_1 και S_2. Αν για $p_0 \in S_1$ το διαφορικό $d\phi_{p_0} : T_{p_0} S_1 \to T_{\phi(p_0)} S_2$ είναι 1-1, τότε υπάρχουν ανοικτά $U \subseteq S_1$ με $p_0 \in U$ και $V \subseteq S_2$ με $\phi(p_0) \in V$ και η $\phi|_U : U \to V$ είναι διαφορομορφισμός.

<u>Πρόταση</u>: $\forall p \in S$, υπάρχει $\varepsilon = \varepsilon(p) > 0$ και περιοχή V του p στην S ώστε η $exp_p|_{B_\varepsilon(0)} : B_\varepsilon(0) \to V$ είναι διαφορομορφισμός.

<u>Απόδειξη</u>: Έχουμε $exp_p : B_\delta(0) \to S$ με διαφορίσιμη η $exp_p(0) = p$. Θα υπολογίσω το διαφορικό $d(exp_p)_0 : T_0(T_pS) \to T_pS$

$d(exp_p)_0(w)$, $w \in T_0(T_pS) = T_pS$. Θέλουμε μια $c : (-\varepsilon, \varepsilon) \to B_\delta(0)$ ώστε $c(0) = 0$, $c'(0) = w$

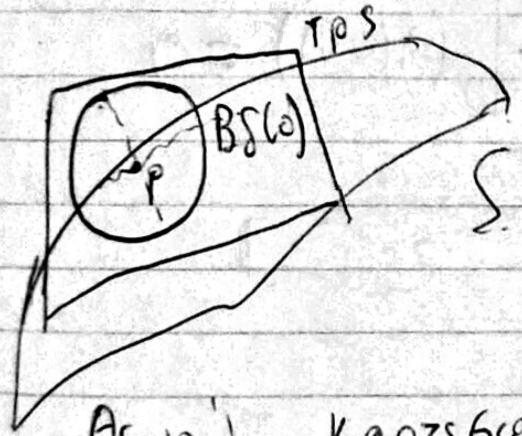
Διαλέγουμε την $c(t) = tw$.

Τότε $\exp_p \circ c(t) = \exp_p(c(t)) = \exp(tw)$

$= \gamma(1, p, tw) = \gamma(t, p, w) \Rightarrow \left(\exp \circ (c(t))\right)' = w$

Άρα $d(\exp)_0(w) = w$

<u>Κανονικές συντεταγμένες</u>



$\exp : B_\delta(0) \subseteq T_pS \to S$

$B_\delta(0) = \{ v \in T_pS \,/\, \|v\| < \delta \}$

$v \mapsto \exp_p(v) = \gamma(1, p, v)$

Θεωρώ καρτεσιανές συντεταγμένες στο T_pS μιας ορθομοναδιαίας βάσης $\{e_1, e_2\}$ του T_pS.

Για κάθε $v \in B_\delta(0)$ έχω $w = ue_1 + ve_2$, $u^2+v^2 < \delta^2$.

Επειδή η $\exp_p : B_\delta(0) \to S$ διαφορομορφισμός

τότε η $X : U \to S$ με $U = \{(u,v) \mid u^2+v^2 < \delta^2\}$

Τότε $X(u,v) = \exp_p(ue_1 + ve_2)$ είναι σύστημα συντεταγμένων της S (οι λεγόμενες κανονικές συντεταγμένες)

Τότε $E(p) = E(0,0) = \langle X_u(0,0), X_u(0,0)\rangle$

$F(p) = F(0,0) = \langle X_u(0,0), X_v(0,0)\rangle$

$G(p) = G(0,0) = \langle X_v(0,0), X_v(0,0)\rangle$

$$X_u(0,0) = \frac{\partial}{\partial u}\Big|_0 = X(u,0) = \exp(ue_1) = \gamma(1,p,ue_1)$$

$$= \gamma(u,p,e_1) \Rightarrow \frac{\partial}{\partial u}\Big|_0 (X(u,v)) = e_1$$

$$\Rightarrow X_u(0,0) = e_1$$

Ομοίως $X_v(0,0) = e_2$

Τότε $\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}(p) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}(p)$

Αν $\left.\begin{array}{l} u = \rho\cos\theta \\ v = \rho\sin\theta \end{array}\right\}$ (u,v) πολικές συντεταγμένες στο T_pS

$\}$ $(\rho>0)$, $0<\theta<2\pi$

· <u>Γεωδαισιακές Πολικές συντεταγμένες</u>

Ορίζω το σύστημα συντεταγμένων $X(\rho,\theta)$
$= \exp_p(\rho\cos\theta e_1 + \rho\sin\theta e_2)$, $0<\rho<\delta$
$0<\theta<2\pi$

Συμβολισμός: C οστικός ημιάξονας. Το σύστημα
$L=\exp(C)$

συντεταγμένων ονομάζεται σύστημα πολικών

συντεταγμένων.

· Γεωδαισιακοί κύκλοι της S δηλαδή εικόνες μέσω της $\exp_p$ κύκλου του T_pS με κέντρο p.

<u>Πρόταση</u>: Τα θεμελιώδη ποσά πρώτης τάξης ως

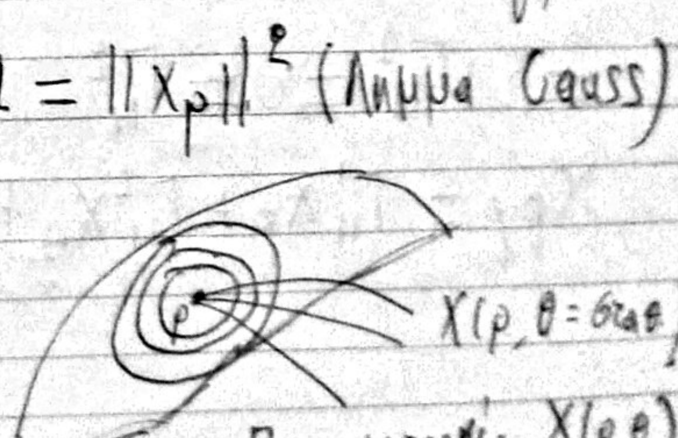
προς σύστημα γεωδαισιακών πολικών συντεταγμένων

πληρεί τα ακόλουθα: $E=1=\|X_\rho\|^2$ (Λήμμα Gauss)

$F=\langle X_\rho, X_\theta\rangle=0$

$G=\|X_\theta\|^2$

$\lim_{\rho\to 0}\sqrt{G}(\rho,\theta)=0$



$$\lim_{\rho \to 0} (\sqrt{G})_\rho (\rho, \theta) = 1$$

$$X(\rho, \theta = \theta_0) = \exp_p(\rho \cos\theta_0 e_1 + \rho \sin\theta_0 e_2)$$

$$= \exp_p(\rho(\cos\theta_0 e_1 + \sin\theta_0 e_2))$$

$$= \gamma(1, p, \rho(\cos\theta_0 e_1 + \sin\theta_0 e_2))$$

$$= \gamma(\rho, p, \cos\theta_0 e_1 + \sin\theta_0 e_2)$$

$$E = \|X_\rho\|^2 = \|\cos\theta_0 e_1 + \sin\theta e_2\|^2 = 1$$

Οι παραμετρικές καμπύλες $X(\rho, \theta = \theta_0)$

πληρούν το σύστημα

$$\begin{cases} \rho'' + \Gamma_{11}^1 (\rho')^2 + 2\Gamma_{12}^1 \rho' \theta' + \Gamma_{22}^1 (\theta')^2 = 0 \\ \theta'' + \Gamma_{11}^2 (\rho')^2 + 2\Gamma_{12}^2 \rho' \theta' + \Gamma_{22}^2 (\theta')^2 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \Gamma_{11}^1 = 0 = \Gamma_{11}^2$$

$$X_{\rho\rho} = \Gamma_{11}^1 X_\rho + \Gamma_{11}^2 X_\theta + eN \Rightarrow \langle X_{\rho\rho}, X_\rho \rangle = \Gamma_{11}^1 E + \Gamma_{11}^2 F$$

$$\Rightarrow \langle X_{\rho\rho}, X_\theta \rangle = \Gamma_{11}^1 E + \Gamma_{11}^2 G$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \langle X_{\rho\rho}, X_\rho \rangle = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2}\langle X_\rho, X_\rho\rangle_\rho = 0 \\ \langle X_{\rho\rho}, X_\theta \rangle = \langle X_\rho, X_\theta\rangle_\rho - \langle X_\rho, X_{\theta\rho}\rangle = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow F_\rho - \frac{1}{2}\langle X_\rho, X_\rho\rangle_\theta = 0 \Rightarrow F_\rho = \frac{1}{2}F_\theta$$

$$\Rightarrow F_\rho(\rho,\theta) = 0 \Rightarrow F \text{ αύξουσα}$$

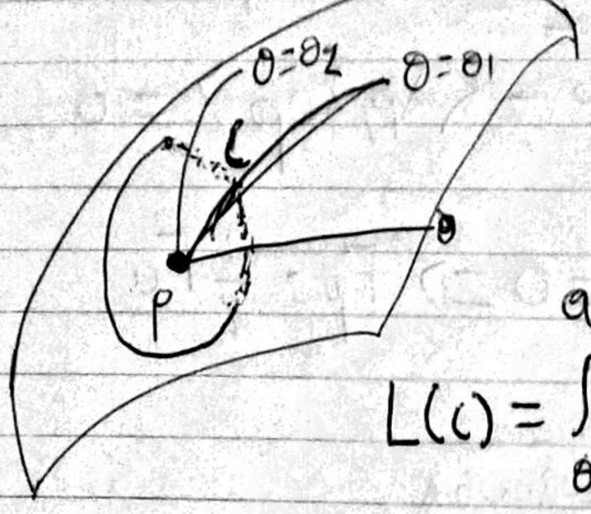
$$F(\rho,\theta) = \lim_{\rho\to 0} F(\rho,\theta) = \lim_{\rho \to 0}\left\langle \frac{\partial c}{\partial t}, \frac{\partial \gamma}{\partial s}\right\rangle$$

$$\left|\left\langle \frac{\partial c}{\partial t}, \frac{\partial \gamma}{\partial s}\right\rangle\right| \leq \left\|\frac{\partial c}{\partial t}\right\| \cdot \left\|\frac{\partial \gamma}{\partial t}\right\| = \left\|\frac{\partial c}{\partial t}\right\| \xrightarrow[\rho\to 0]{} 0$$

Άρα $F(\rho,\theta) = 0$

Έξοχο Θεώρημα Gauss

$$K = -\frac{(\sqrt{G})_{\rho\rho}}{\sqrt{G}} \Rightarrow (\sqrt{G})_{\rho\rho} + K\sqrt{G} = 0$$



Οπου c το τμήμα του γεωδαισιακού κύκλου που περιέχεται μεταξύ των ακτινικών $\theta=\theta_1$, $\theta=\theta_2$

$$L(c)=\int_{\theta_1}^{\theta_2}\|x_\theta\|\,d\theta=\int_{\theta_1}^{\theta_2}\sqrt{G}(\rho,\theta)\,d\theta$$

$$\Rightarrow L(\rho)=\int_{\theta_1}^{\theta_2}\sqrt{G(\rho,\theta)}\,d\theta$$

$$\Rightarrow L'(\rho)=\int_{\theta_1}^{\theta_2}\left(\sqrt{G(\rho,\theta)}\right)_\rho d\theta$$

$$L''(\rho)=\int_{\theta_1}^{\theta_2}\left(\sqrt{G(\rho,\theta)}\right)_{\rho\rho} d\theta=-\int_{\rho_1}^{\rho_2}K\sqrt{G}(\rho,\theta)\,d\theta$$

Εστω $K<0$ Τότε $L''(\rho)>0$

$$\Rightarrow L'(\rho)\nearrow \qquad \rho>\rho_1\Rightarrow L'(\rho)>L'(\rho_1)$$

$$\Rightarrow L'(\rho)\geq\lim_{\rho_1\to 0}L'(\rho_1)\ ,\ \lim_{\rho_1\to 0}L'(\rho_1)=\int_{\theta_1}^{\theta_2}d\theta=\theta_2-\theta_1$$

$$L'(\rho)\geq\theta_2-\theta_1>0\Rightarrow L'(\rho)>0\Rightarrow L(\rho)\nearrow$$